

# Analisi armonica

*Angelo Bisceglia*

Teorema:

Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento (f.d.t.) razionale fratta con poli a parte reale negativa, soggetto ad un forzamento sinusoidale, a regime, ha una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza (isofrequenziale).



Dato un sistema lineare stazionario asintoticamente stabile (poli a parte reale negativa)  $G(s)$ ; applicato il segnale di ingresso (forzamento) sinusoidale :

$$x(t) = X \operatorname{sen}(\omega t)$$

Dopo esaurito il transitorio (a regime) l'uscita è:

$$y(t) = Y(\omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi(\omega))$$

Si definisce funzione risposta armonica (f. r. a.)  $F(\omega)$  di variabile reale  $\omega \geq 0$  a valori complessi :

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)}$$

Si può dimostrare che:  $F(\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$

L'analisi di un sistema con la f.r.a. è molto agevole perché collegata alla strumentazione di laboratorio, i.e. generatori di segnali sinusoidali con frequenza e ampiezza variabili. In questo modo si può ricavare sperimentalmente la sua f.r.a. e quindi la sua f.d.t.

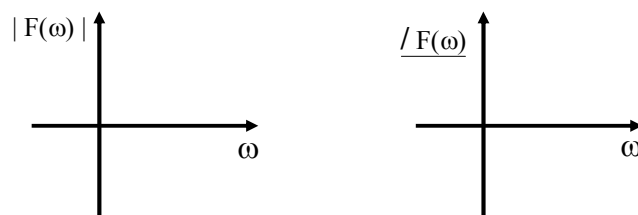
L'analisi in frequenza non permette però di collegare i risultati della f.r.a. con quelli dell'analisi temporale, eccezion fatta per i sistemi di 2° grado.

$F(\omega)$  è detta Trasformata (unilatera) di Fourier.

## RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE PER LA TRASFORMATA DI FOURIER:

### I DIAGRAMMI DI BODE

Sono le rappresentazioni grafiche separate del modulo  $|F(j\omega)|$  e della fase  $\angle F(j\omega)$  del numero complesso  $F(j\omega)$  al variare di  $\omega \in (0 \div +\infty)$



Si notino le seguenti proprietà per le fasi:

$$\angle \frac{1}{F(j\omega)} = - \angle F(j\omega)$$

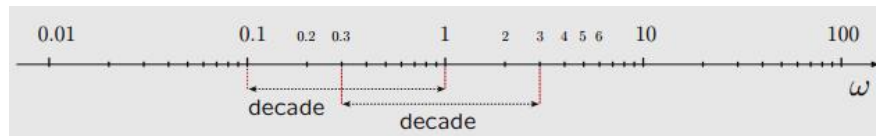
$$\angle F_1(j\omega) * F_2(j\omega) = \angle F_1(j\omega) + \angle F_2(j\omega)$$

Se si esprime il modulo in dB i.e.  $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |F(j\omega)|$  si ottengono le seguenti proprietà per i moduli:

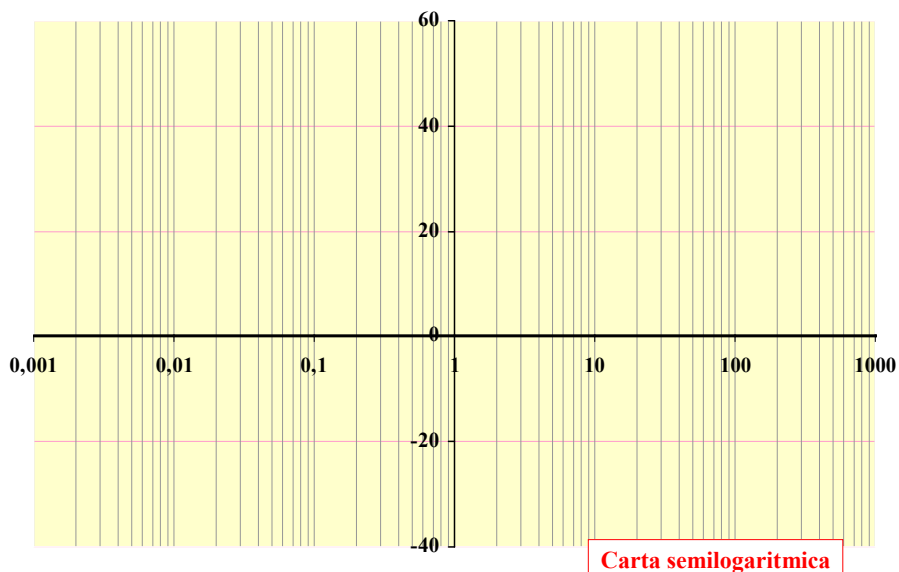
$$| \frac{1}{F(j\omega)} |_{dB} = - | F(j\omega) |_{dB}$$

$$| F_1(j\omega) * F_2(j\omega) |_{dB} = | F_1(j\omega) |_{dB} + | F_2(j\omega) |_{dB}$$

Le pulsazioni  $\omega$  vengono riportate sull'asse delle ascisse usando una scala logaritmica in base 10  $\log_{10} \omega$



Con tale scala, i diagrammi di alcune funzioni elementari (fattori monomio, binomio e trinomio) assumono una forma particolarmente semplice. Inoltre, un altro vantaggio è la possibilità di rappresentare ampi intervalli di variazione delle grandezze.



Una f. r. a. può essere messa sotto forma di prodotti:

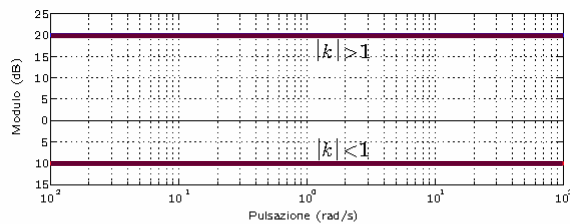
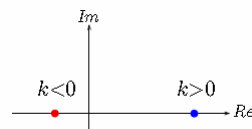
$$F(j\omega) = \text{costante} \times \frac{\prod \text{monomi} \times \prod \text{binomi} \times \prod \text{trinomi}}{\prod \text{monomi} \times \prod \text{binomi} \times \prod \text{trinomi}}$$

che quindi contiene 4 tipologie di termini:

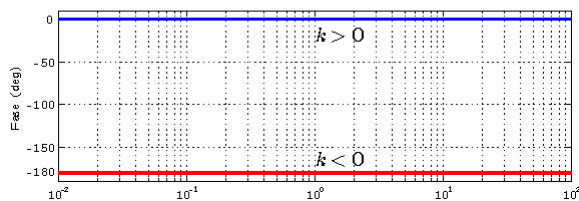
1. **Costante**  $k$
2. **Monomio**  $j\omega$   
proveniente o da uno zero (se a numeratore) o da un polo (se a denominatore) in  $s = 0$
3. **Binomio**  $1 + j\omega\tau$   
proveniente da uno zero (se a numeratore) e/o da un polo (se a denominatore) reale in  $s = -1/\tau$
4. **Trinomio**  $1 + 2\delta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2$   
proveniente da una coppia di zeri (se a numeratore) e/o di poli (se a denominatore) complessi coniugati  $a \pm j b$  con :

$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \delta = -a/\omega_n$$

## 1. Fattore costante k

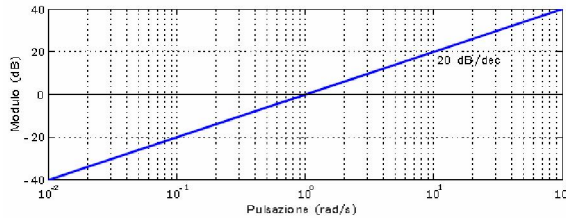


$$\text{modulo} \Rightarrow |k|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |k|$$



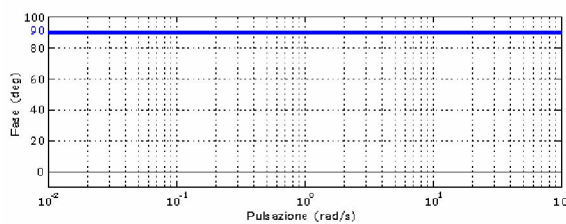
## 2.a Fattore monomio a numeratore $j\omega$

Per il **modulo** si ha:  $|j\omega|_{dB} = 20 \log_{10} \omega$

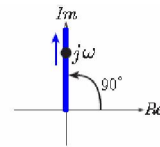


Pendenza 20 dB/dec se molteplicità zero è 1;

Pendenza 20 q dB/dec se molteplicità zero è q.

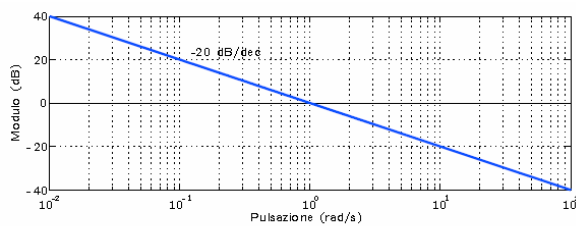


Per la **fase**



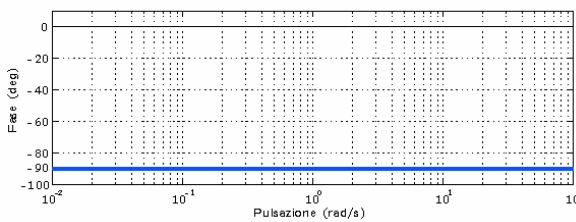
## 2.b Fattore monomio a denominatore $1/j\omega$

Da:  $\underline{1/F(j\omega)} = - \underline{F(j\omega)}$   $|1/F(j\omega)|_{dB} = - |F(j\omega)|_{dB}$



Pendenza -20 dB/dec se molteplicità polo è 1;

Pendenza -20 q dB/dec se molteplicità polo è q.



### 3.a Fattore binomio a numeratore $(1+j\omega\tau)$

**Modulo:**  $|1 + j\omega\tau|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$

Approssimando:

$$\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll 1/|\tau| \\ \omega|\tau| & \text{se } \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

Si ha:

$$|1 + \omega\tau|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll 1/|\tau| \\ 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau| & \text{se } \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

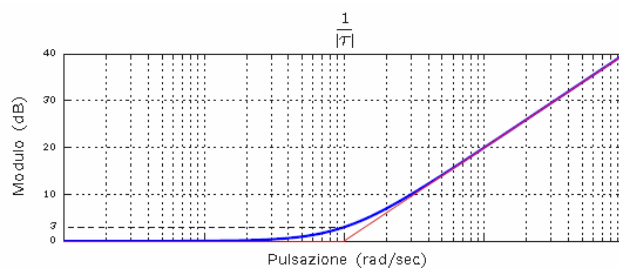
Queste 2 semirette rappresentano il **diagramma asintotico del modulo**

**NB:** lo scostamento max tra diagramma reale ed asintotico si ha in corrispondenza della pulsazione di rottura  $1/|\tau|$  e vale

$$|1 + j\tau / |\tau| |_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$

### 3.a Fattore binomio a numeratore $(1+j\omega\tau)$

#### **Modulo**



Pendenza 20 dB/dec se  
moltiplicità zero è 1;

Pendenza 20 q dB/dec se  
moltiplicità zero è q.

### 3.a Fattore binomio a numeratore $(1+j\omega\tau)$

#### Fase:

Approssimando si ha:

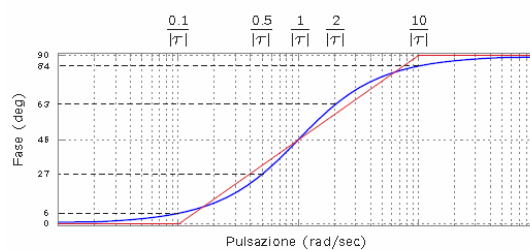
$$\angle 1 + j\omega\tau \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \ll 1/|\tau| \\ +90^\circ \text{ } [-90^\circ] & \text{se } \omega \gg 1/|\tau| \text{ e } \tau > 0 \text{ [e } \tau < 0] \end{cases}$$

Questi 2 asintoti sono raccordati da un segmento che parte da  $0,1/|\tau|$  e termina in  $10/|\tau|$ .

Il **diagramma asintotico delle fasi** è costituito da una spezzata a 3 lati.

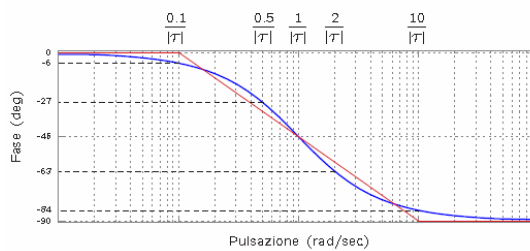
NB: lo scostamento max tra diagramma reale ed asintotico si ha in corrispondenza delle pulsazioni  $0,1/|\tau|$  e  $10/|\tau|$  e vale circa  $\pm 6^\circ$

### 3.a Fattore binomio a numeratore $(1+j\omega\tau)$



Per  $\tau > 0$

(Sistema asintoticamente stabile)



Per  $\tau < 0$

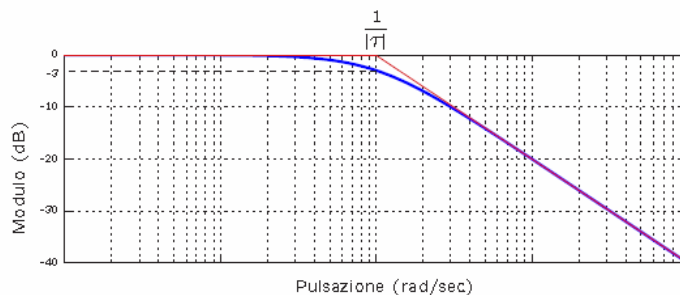


### 3.b Fattore binomio a denominatore $1/(1+j\omega\tau)$

#### Modulo:

Da:

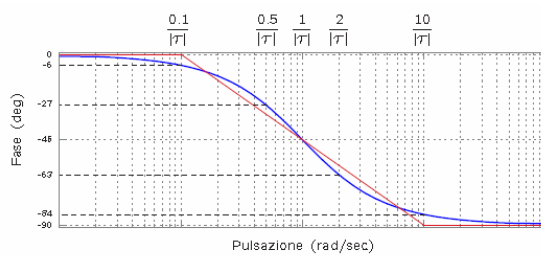
$$|1/F(j\omega)|_{dB} = -|F(j\omega)|_{dB}$$



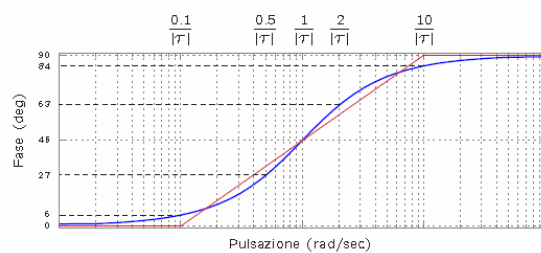
### 3.b Fattore binomio a denominatore $1/(1+j\omega\tau)$

#### Fase:

Da:  $\angle 1/F(j\omega) = -\angle F(j\omega)$



Per  $\tau > 0$



Per  $\tau < 0$

#### 4.a Fattore trinomio a numeratore $[1 + 2\delta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2]$

**Modulo:**

$$\left| 1 + 2 \frac{\delta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| = \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\delta \frac{\omega}{\omega_n} \right| = \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Approssimando:

$$\left| 1 + 2 \frac{\delta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ \frac{\omega^2}{\omega_n^2} & \text{se } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

#### 4.a Fattore trinomio a numeratore $[1 + 2\delta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2]$

Approssimando:

$$\left| 1 + 2 \frac{\delta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ 40 \log_{10} \omega - 40 \log_{10} \omega_n & \text{se } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

queste due semirette costituiscono il **diagramma asintotico del modulo**

NB: lo scostamento tra il diagramma reale e quello asintotico in corrispondenza del punto di rottura (pulsazione naturale)  $\omega_n$  vale  $20 \log_{10} 2\delta$

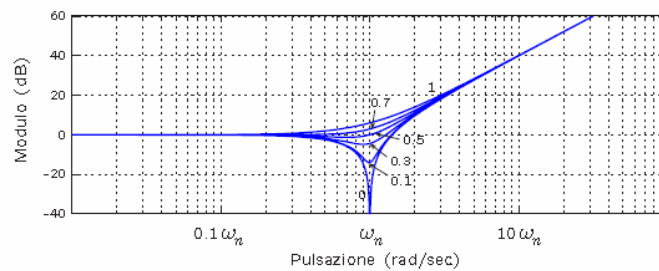
i.e. dipende da  $\delta$ :

per $\delta = 0$	lo scostamento vale $-\infty$ in dB
per $\delta = 0,5$	lo scostamento vale 0 in dB
per $\delta = 1$	lo scostamento vale 6 in dB

per  $\delta < 1/\sqrt{2} = 0,707$

il modulo di un fattore trinomio a numeratore ha un "picco" negativo (antirisonanza) in prossimità della pulsazione naturale, tanto più accentuato quanto minore è  $\delta$  (coefficiente di smorzamento).

#### 4.a Fattore trinomio a numeratore $[1 + 2\delta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2]$



#### 4.a Fattore trinomio a numeratore $[1 + 2\delta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2]$

**Fase:**

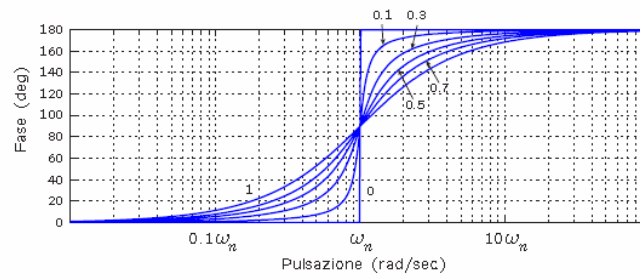
Procedendo in modo analogo si ha:

$$\left[ 1 + 2\frac{\delta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right] \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ +180^\circ \text{ } [-180^\circ] & \text{se } \omega \gg \omega_n \text{ e } \delta > 0 \text{ } [\delta > 0] \end{cases}$$

La transizione tra questi due valori avviene in modo simmetrico rispetto alla pulsazione naturale  $\omega_n$  e tanto più bruscamente quanto minore è  $\delta$ ; in particolare per  $\delta = 0$  si ha una discontinuità nel diagramma delle fasi in corrispondenza a  $\omega_n$ .

NB: non esiste un diagramma asintotico per la fase del termine trinomio.

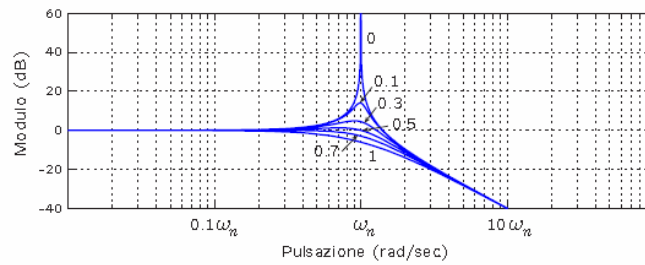
#### 4.a Fattore trinomio a numeratore $[1 + 2\delta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2]$



#### 4.b Fattore trinomio a denominatore $1/[1 + 2\delta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2]$

**Modulo:**

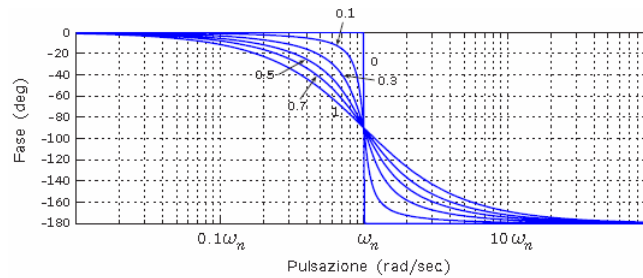
Da:  $|1 / F(j\omega)|_{dB} = - |F(j\omega)|_{dB}$



#### 4.b Fattore trinomio a denominatore $1/[1 + 2\delta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2]$

**Fase:**

Da:  $\angle 1/F(j\omega) = - \angle F(j\omega)$



### TRACCIAMENTO DEI DIAGRAMMI ASINTOTICI DI BODE

#### Tracciamento del diagramma asintotico dei moduli

**PASSO 0:** Mettere la funzione nella **forma fattorizzata**.

**PASSO 1:** Si segnino le ascisse dei **punti di rottura**:

$1/\tau_i$  (termine binomio numeratore)

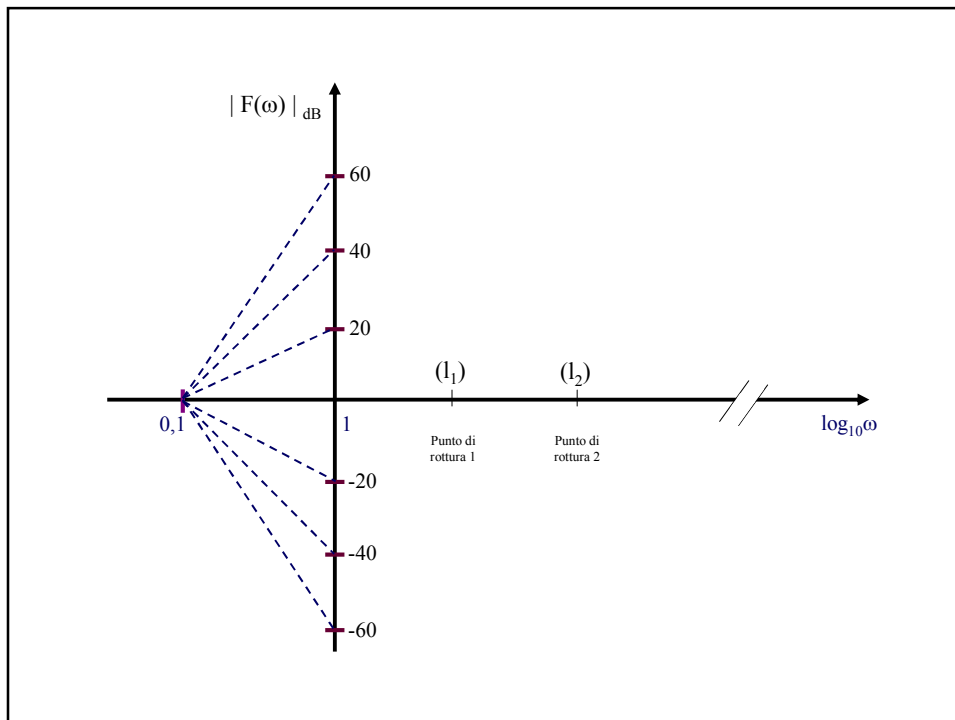
$1/\tau_i$  (termine binomio denominatore)

$\omega_{nh}$  (termine trinomio numeratore)

$\omega_{nh}$  (termine trinomio denominatore)

Si associno ad ogni punto di rottura le **pendenze**  $l_r$  così definite:

$$l_r \begin{cases} +20m_i & \text{per i termini binomi di molteplicità } m_i \text{ al numeratore} \\ +40m_h & \text{per i termini trinomi di molteplicità } m_h \text{ al numeratore} \\ -20n_i & \text{per i termini binomi di molteplicità } n_i \text{ al denominatore} \\ -40m_h & \text{per i termini trinomi di molteplicità } m_h \text{ al denominatore} \end{cases}$$



**PASSO 2:** Si tracci il primo lato (da  $\log_{10}\omega \rightarrow -\infty$ ) del diagramma asintotico che è una semiretta di pendenza  $l_0$  data da:

+20  $m_0$  dB/dec se vi è uno zero nell'origine di molteplicità  $m_0$

-20  $n_0$  dB/dec se vi è un polo nell'origine di molteplicità  $n_0$

la semiretta (o eventualmente il suo prolungamento) interseca l'asse delle ordinate ( $\log_{10}\omega = 0 \Rightarrow \omega = 1$ ) nel punto **20  $\log_{10} |k|$**

**PASSO 3:** Si traccino i lati successivi del diagramma asintotico. Ogni volta che la retta incontra un punto di rottura cambia la sua pendenza:  
alla pendenza che la retta aveva prima del punto di rottura ora si aggiunge (algebricamente) la pendenza del punto di rottura raggiunto.  
Così, dopo il terzo punto di rottura, la pendenza è  $I_0+I_1+I_2+I_3$  dB/dec

Si può verificare che l'ultimo lato ( $\log_{10}\omega \rightarrow +\infty$ ) risulta inclinato di:  
 $20(m-n)$  dB/dec [m numero degli zeri n numero dei poli]